Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. Dada la función $(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de a, b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa x = 0 y x = -2
- La función corta el eje *OX* en el punto x = 1

Dar la expresión de la función resultante. (2,5 ptos)

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow 1^4 + a.1^3 + b.1^2 + c.1 + 7 = 0 \rightarrow a + b + c + 8 = 0 \\ f'(0) = 0 \rightarrow 4.0^3 + 3a.0^2 + 2b.0 + c = 0 \rightarrow c = 0 \\ f'(-2) = 0 \rightarrow 4.(-2)^3 + 3a.(-2)^2 + 2b.(-2) = 0 \rightarrow 12a - 4b - 32 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 4b + 32 = 0 \\ 12a - 4b - 32 = 0 \end{cases} \rightarrow 16a = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow 0 + b + 8 = 0 \rightarrow b = -8 \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow x^4 + 8x^2 + 7$$

2. Dado el sistema: $\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = -1 \\ 3x + y + k^2 z = 3k \end{cases}$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro ***k*** (1,5 ptos)

b) Resolverlo para **k = 2** (1 pto)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & k^2-3 \end{vmatrix} = (-1).\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & k^2-3 \end{vmatrix} = k^2 - 3 + 2 = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) \rightarrow Si\ |A| = 0 \rightarrow$$

$$(k-1)(k+1) = 0 \rightarrow \forall k \in R - \{-1\ ,\ \ 1\} \rightarrow rang\ (A) = 3 = N\acute{u}\boldsymbol{mero\ de\ inc}\acute{o}\boldsymbol{gnitas} \rightarrow$$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado$$

Si k = -1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow rang\ (A) = rang\ (A\ /\ B) = 2 < N\acute{u}\boldsymbol{mero\ de\ inc}\acute{o}\boldsymbol{gnitas}$$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

Si k = 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \rightarrow rang\ (A) = 2 \neq rang\ (A\ /\ B) = 3$$

$$Sistema\ Incompatible$$

Si k = 2 es un sistema Compatible Determinado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \rightarrow 3z = 9 \rightarrow z = 3 \rightarrow x - 6 = -5 \rightarrow x = 1 \rightarrow 2 + y + 9 = 2 \rightarrow$$

$$y = -9 \rightarrow Soluci\acute{o}n \rightarrow (x\ ,\ \ y\ ,\ \ z) = (1\ ,\ \ -9\ ,\ \ 3)$$

3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:
- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$ y : $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$
- pasa por el punto (2 , -1, 5) (2,5 ptos)

a) La recta **s** paralela tendrá como vector director el de la recta intersección **r** de ambos planos, con el punto dado queda definida

$$\begin{cases} \pi_1: -3x + 9y - 3z = 0 \\ \pi_2: 2x - y + 3z = 5 \end{cases} \to -x + 8y = 5 \to x = -5 + 8y \to -5 + 8y - 3y + z = 0 \to z = 5 - 5y$$

$$\to r: \begin{cases} x = -5 + 8\alpha \\ y = \alpha \\ z = 5 - 5\alpha \end{cases} \to \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} = (8\,, \quad 1\,, \quad -5) \to s: \begin{cases} x = 2 + 8\beta \\ y = -1 + \beta \\ z = 5 - 5\beta \end{cases}$$

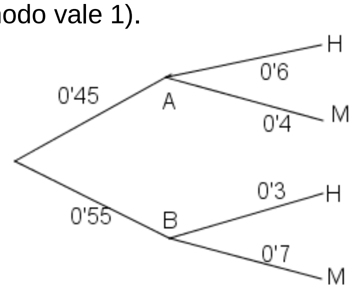
4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que no traen su propia bolsa son mujeres.
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. (0,5 ptos)
b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres? (1 pto)
c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa? (1 pto)

Llamemos A, B, H y M, a los sucesos siguientes, “no traer bolsa propia”, "traer bolsa propia", "hombre" y "mujer", respectivamente.

Datos del problema: p(B) = 55% = 0’5; p(H/B) = 30% = 0’30 ; p(M/A) = 40% = 0’40, ...

a)
Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



b)
¿Qué proporción de clientes son mujeres?

Por el teorema de la Probabilidad Total:
Me piden **p(M) =** p(A).p(M/A) + p(B).p(M/B) = (0’45)·(0’4) + (0’55)·(0’7) **= 112/200 = 0’565 = 56’5 %**.

c)
Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Me piden **p(B/H)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/H) =} \frac{p(B \cap H)}{p(H)} = \frac{p(B)\cdot p(H/B)}{1 - p(M)} = \frac{(0'55)\cdot(0'3)}{1 - 0'565} \mathbf{= 11/29 \cong 0'379}.$$

OPCIÓN B

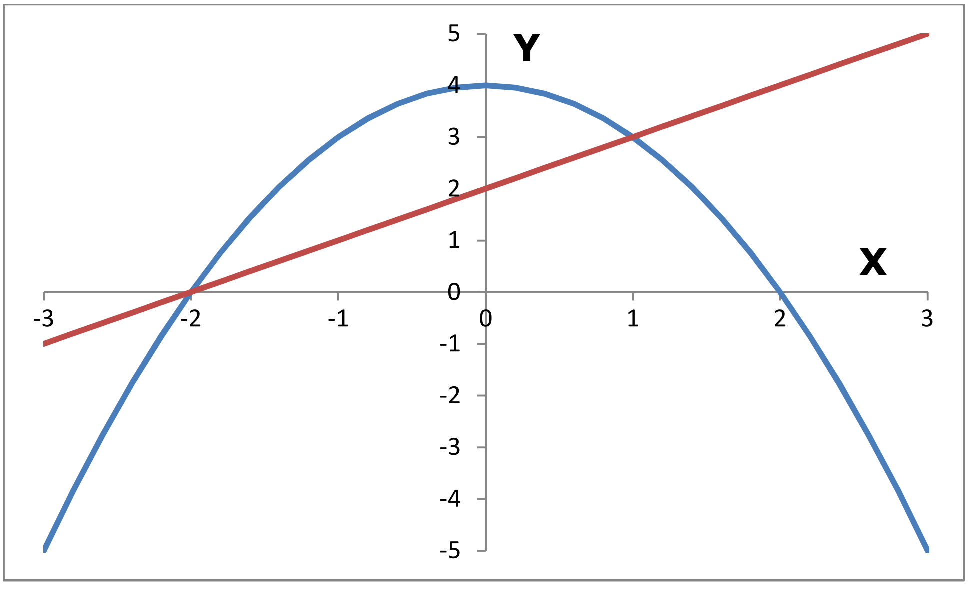
1. Dada la parábola de ecuación y = 4 – x^2 y la recta y = x + 2
a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores. (0,5 ptos)
b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas. (0,5 ptos)
c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas. (1,5 ptos)

a) Llamándoles a las funciones dadas f(x) y g(x) respectivamente

$$4 - x^2 = x + 2 \to x^2 + x - 2 = 0 \to \Delta = 1^2 - 4.1.(-2) = 9 \geq 0 \to x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.1} \to \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \to \begin{cases} f(1) = 4 - 1^2 = 3 \\ g(1) = 1 + 2 = 3 \end{cases} \\ x = -2 \to \begin{cases} f(-2) = 4 - (-2)^2 = 0 \\ g(-2) = (-2) + 2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

b)



c)

$$\boldsymbol{A = \int_{-2}^{1}(4 - x^2)\ dx - \int_{-2}^{1}(2 + x)\ dx = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)\ dx = 2.[x]_{-2}^{1} - \frac{1}{3}[x^3]_{-2}^{1} - \frac{1}{2}[x^2]_{-2}^{1}}$$

$$\boldsymbol{A = 2.[1 - (-2)] - \frac{1}{3}[1^3 - (-2)^3] - \frac{1}{2}[1^2 - (-2)^2] = 2.3 - \frac{1}{3}[1 - (-8)] - \frac{1}{2}}(1 - 4)$$

$$\boldsymbol{A = 6 - \frac{9}{3} + \frac{3}{2} = 6 - 3 + \frac{3}{2}} = 3 + \boldsymbol{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{6+3}{2}} = \boldsymbol{\frac{9}{2}}\ u^2$$

2. Sea la matriz **C = A . B** donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de **m** para los que existe inversa de la matriz *C* (1,25 ptos)
b) Calcular la matriz inversa de *C* en el caso de m = 2(1,25 ptos)

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es no nulo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix} \to |C| = \begin{vmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = -2(1+m)(1-m)$$

$$Si\ |C| = 0 \to -2(1+m)(1-m) = 0 \to \begin{cases} 1+m = 0 \to m = -1 \\ 1-m = 0 \to m = 1 \end{cases} \to$$

$$\forall m \in R - \{-1\ ,\quad 1\} \to |C| \neq 0 \to Existe\ C^{-1}$$

b) Si **m = 2**

$$|C| = -2(1+2)(1-2) = (-2).3.(-1) = 6 \neq 0 \to Existe\ C^{-1}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}.adj\ (C)^t \to C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \to C^{-1} = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ y
$s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1$ (2,5 ptos)

Estudiaremos que la rectas son paralelas o se cortan en un punto ya que si se cruzasen no formarían un plano .

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 - 2u \\ y = 0 \\ z = 1 + u \end{cases} \end{cases} \to \begin{cases} 1 - t = -1 - 2u \\ t = 0 \\ t = 1 + u \end{cases} \to \begin{cases} 1 - 0 = -1 - 2u \to -2u = 2 \to u = -1 \\ 0 = 1 + u \to u = -1 \end{cases} \to Se\ cortan\ en\ un\ punto$$

El plano δ queda determinado por los vectores directores de las rectas y por el vector PG, siendo P el punto de corte de las rectas y G el punto generador del plano; los tres vectores son coplanarios y, por ello, su producto mixto es nulo, ya que lo es el volumen del paralelepípedo que forman, y la ecuación pedida del plano

$$P \begin{cases} x = 1 - 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \to P(1\ ,\quad 0\ ,\quad 0) \to \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,\quad 1\ ,\quad 1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-2\ ,\quad 0\ ,\quad 1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,\quad y\ ,\quad z) - (1\ ,\quad 0\ ,\quad 0) = (x-1\ ,\quad y\ ,\quad z) \end{cases} \to$$

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to (x-1) - 2y + 2z + y = 0 \to \ \delta \equiv x - y + 2z - 1 = 0$$

El coseno del ángulo que forman los planos es el valor absoluto del producto escalar de los vectores directores de ambos planos entre el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\delta} = (1\ ,\quad -1\ ,\quad 2) \\ \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,\quad -1\ ,\quad 1) \end{cases} \to \cos\theta = \frac{|(1\ ,\quad -1\ ,\quad 2).(2\ ,\quad -1\ ,\quad 1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}.\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1.2 + (-1).(-1) + 2.1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}} = \frac{5}{6}$$

$$\theta = arc\cos\frac{5}{6} = 33º33'26''$$

4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:
a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses. (0,75 ptos)
b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1año. (0,75 ptos)
c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años. (1 pto)

El tiempo de vida de los ventiladores es un variable aleatoria **X** que **sigue una normal N(μ, σ) = N(18, 3'6)** medido en meses.

a)
Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses.

Me piden **$p(X \leq 16) =$** $p\left(Z \leq \frac{16 - 18}{3'6}\right) = p(Z \leq -0'56) = 1 - p(Z \leq 0'56)$ **$= 1 - 0'7123 = 0'2877.$**

b)
Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1año.

Me piden **$p(X \geq 1\cdot(12)) = p(X \geq 12) =$** $p\left(Z \geq \frac{12 - 18}{3'6}\right) = p(Z \geq -1'67) = 1 - p(Z \leq -1,67)]$ **=**

= $1 - [1 - p(Z \leq 1'67)]$ **=** $p(Z \leq 1'67)] =$ **$0'9525.$**

c)
Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años.

Me piden $p(1\cdot(12) \leq X \leq 2\cdot(12)) = p(12 \leq X \leq 24) = p\left(\frac{12 - 18}{3'6} \leq Z \leq \frac{24 - 18}{3'6}\right) = p(-1'67 \leq Z \leq 1'67) =$

$= p(Z \leq 1'67) - p(Z \leq -1'67)] = p(Z \leq 1'67) - [1 - p(Z \leq 1'67)] = 2\cdot p(Z \leq 1'67) - 1 = 2\cdot 0'9525 - 1$ **$= 0'905.$**